高校生への数学講義の一例
—15パズルの非可解性について—

A lecture for high school students on non-solvability of 15 puzzles

片山　聡一郎　　田川　裕之
KATAYAMA Soichiro　　TAGAWA Hiroyuki
（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

数学の研究者 (大学などの教員) が中学生・高校生を対象とした単発の講義を頼まれることが近年増えてきた。これは現代数学の啓蒙という観点から非常に重要な機会ではあるが、高校までにおける数学の流儀と、大学以降における数学の流儀との違いにより、題材選びには大変苦労することが多い。

ここでは、中学生・高校生に (現代) 数学の何を伝えるべきか、またその際にどのような困難が予想されるかについてまず考察する。また、そのような困難を克服できるような題材の一例として、一般にも有名な 15 パズルの裏に潜む数学理論を高校生にも分かる言葉で解説したものを紹介する。

キーワード: 15 パズル、並び替え、転倒数、15 盤、不変量

1.　はじめに

数学は、純粋に論理のみで構築されている学問である。いくつかの真実と認められること (公理) から出発して、論理的に導かれる結論 (定理) を得る。得られた定理を踏み台にして、再び新たな結論を論理的に導く。このように次々と定理を積み重ねていくことにより数学理論は構成される。このことから分かるように、出発点となる公理の成立を仮定する限り、完成した理論をある研究者は正しいと考えるが、ある研究者は正しくないと考えるということはあり得ない (もちろん未解決の予想の正否に関しては研究者によって見解が分かれることはありうる)。この論理的な厳密性と結果の普遍性が数学の特徴である。

すでに作り上げられた理論を勉強する際に誤解しがちではあるが、新しい定理が作られるにあたっては、上に述べたように順番を追って形成されていくわけでは必ずしもない。様々な傍証から「このような結果が成り立つに違いない」と予想して、これまでに知られていることと予想される結果との隙間を埋めていくことの方がむしろ多いであろう。

現代の数学は、それ自身の中で閉じて数学以外の分野とは全く無関係に発展しているように見えるかもしれない。しかしそれは正しくない。もちろん、数学それ自身の目的のために発展することも少なくないが、解析学や幾何学と物理学、代数学と暗号理論、確率論と経済学などの関係に見られるように、様々な分野から題材を得てお互いに影響を与えながら発展していくことも多いのである。他分野で行なわれていることが、上で述べたような「新しい理論のための傍証」となることも少なくない。また、純粋に数学の中のみで発展してきた理論が、後になって数学以外の分野へと豊かな応用をもたらした例もこれまでの歴史で数多く見出すことができる。

できる限り広い対象を同一の理論で扱おうとするのが数学研究のひとつの方向性である。そのため対象の抽象化が行なわれ、求める理論に不必要な枝葉はそぎ落とされていく。これにより、一見したところでは全く別の分野の別の現象だと思われていたことが、数学的には同一のことだと発見された例も少なくない。しかし、この抽象化によって、不慣れなものには他分野との関連が見えにくくなっているのも事実であろう。これが現代数学は他の分野と全く隔絶したものだと誤解される一因になっていることは想像に難くない。

以上のことを踏まえて、中学・高校生に数学の魅力を伝えるために留意すべき点について考察しよう。

あるときには目標とは無関係そうに見える段階も経ながら、既知のことから論理的に推論を積み重ねていき、最終的には新しい結論に到達するのが数学の醍醐味のひとつであろう。そこへ至る過程を無視して、あ

る特定の定理だけを取り出して紹介してみても、その魅力は伝わりにくいように思われる。最新の定理のみをいくつか取り出して「知識」として授けても、中学・高校生にとってはほとんど無意味といってもよいのではないだろうか。

基礎的なところから始めて完全に理論を構築してみせるのが理想であるが、これは時間の都合上からも困難であろう。ある段階の結論までは成立することを聴衆に認めてもらい、そこから先の展開を紹介するという手が次善の策である。しかし出発点に納得がいかなければ、その先の話を聞いてもらうのは難しいであろうから、この出発点の設定が難しいところである。また、近年の中学・高校生は「正しい結果を得る」ことに力点を置きすぎているように思われる。数学において正しい結果を得ることは大前提であり、当然重要なことであるが、あまりにも過程を軽視しすぎているように思われる。よく理解していない手続きによって結果のみを求めることができても、数学を理解したとはいえないであろう。この意味からも、可能な限り途中の過程を見せることは重要であると考える。しかし、途中の論理展開があまりに難しいと、不慣れなものはすぐに投げ出してしまうであろう。可能な限り簡明な推論で、意外な結果が得られることが望ましい。

最終的に到達した結論自体の面白さが伝わらなければ意味がないのはいうまでもない。しかし数学の定理の面白さを純粋に数学的に味わうにはある程度の数学的素養が必要であることが多い。むしろ、その定理の他分野への応用を通じて面白さを感じてもらう方が容易であるように思われる。中学・高校で学ぶ数学は他分野との関連が見えにくくなっている (それどころか数学の教科書の中ですらその内容が細分化されてお互いの関連が見えにくくなっている) ことを考えると、数学が無関係そうに見える様々なことと関連しているのを伝えるためにも、これは有効な手段であろうと思われる。馴染みのないことを馴染みのないことに応用しても面白さは伝わらないであろうから、応用される対象は出来るだけ身近でよく知られたものであることが望ましいであろう。

以上の考察をもとに今回考えた題材は以下のものである:

- 扱う題材は数学的にいうと、代数学における対称群の元に対して定義される転倒数の性質である。
- 応用としては、世間でもよく知られた 15 パズル (次節参照) を扱い、完成不可能な 15 パズルを判定する方法を与える。

ゲームやパズルは大好きではあるが数学は大嫌いという中学生・高校生は少なくないであろう。このようなパズルにも数学が応用できるという有用性が少しでも分かれば、そのような人達も数学に対して興味を持ってくれるのではないかと考えたのが、この題材を選んだ第一の理由である。

また転倒数の重要な性質に関しては、実験を通じて、想定される結果を予想するという過程も体験できるようになっている。

実例の確認をするためには初歩の順列・組合せに慣れているほうが容易ではあるが、必ずしも本質的ではない。推論は平易なものであり、本筋を理解するために必要な予備知識はほとんどない。予備知識が必要ないということは、聴衆の負担が少ないという利点を持つが、裏を返せば中学・高校で学ぶ数学との直接の関連が見えにくいということでもある。この点はこの題材の欠点といえるかもしれない。

本稿の残る部分では、高校生向けに構成したこの題材を紹介する。

2. 15 パズルとは

15 パズル (15 ゲームとも呼ばれている) は、15 枚のパネルと外枠から構成されている。15 枚のパネルにはそれぞれ 1 から 15 の数字がひとつずつ書かれており、外枠はその中に縦に 4、横に 4 の合計 16 のマス目を持つ。パネルとマス目はどちらも同じ大きさの正方形である。最初にパネル 15 枚を外枠の中に適当に並べていく。すると当然マス目ひとつは空白のまま残されることになる。

3	1	12	15
13	2	5	11
7	14		4
9	10	6	8

この空白のマス目に隣接したパネルひとつを空白のマス目に滑らせると、結果として空白だったところに数字の書かれたパネルが入り、そのパネルのあった場所は空白になる。

3	1	12	15
13	2	5	11
7	14		4
9	10	6	8

$\longrightarrow$

3	1	12	15
13	2	5	11
7		14	4
9	10	6	8

この操作を繰り返して、左上端から順に $1, 2, \ldots, 15$

と数字が並んだ状態（この状態を完成状態と以下では呼ぶ）にすることが 15 パズルの目的である。

3	1	12	15
13	2	5	11
7	14		4
9	10	6	8

↓

3	1	12	15
13	2	5	11
7		14	4
9	10	6	8

↓

⋮

↓

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

このパズルは、1878 年にサム・ロイド氏により考案され、完成状態の 14 と 15 を入れ替えた状態からパズルを完成させる方法の発見に懸賞金がかけられたことから当時大変な反響を呼んだという記録が残っている ([1] 参照)。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

↓

⋮

???

⋮

↓

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

実際には、そのような懸賞金がもらえる方法は存在しないことが知られている。

以下では、並び替えと転倒数という考えを導入することにより、このことを示してみよう。

3.　並び替えと転倒数

まず、問題を定式化する前の準備段階として、並び替えと転倒数の話を本節では行うこととする。

数 $1, 2, 3$ を適当な順番にひとつずつ並べたものを 1〜3 の並び替えと呼ぶ。例えば 3 1 2 は 1〜3 の並び替えであるし、2 1 3 も 1〜3 の並び替えである。

念のために注意しておくと、1 1 3 2 のように同じ数を含んだものや、1 3 などのように抜けている数 (この場合は 2) があるものは 1〜3 の並び替えとは呼ばない。

表記を明確にするために、1〜3 の並び替えを表すときには 3 1 2 のように書く代わりに、$(3, 1, 2)$ のように各々の数の間にカンマを入れ、さらに並び替えの最初と最後に丸括弧を入れて書くことにしよう (カンマを入れるのは数の区切りを明確にするためであり、最初と最後の丸括弧はこれで一塊のものであることを強調するためである)。このように表記すると、1〜3 の並び替えは全部で

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

の 6 通りである。

同じように $1, 2, 3, 4$ を適当な順番でひとつずつ並べたものを 1〜4 の並び替え、$1, 2, 3, 4, 5$ を適当な順番でひとつずつ並べたものを 1〜5 の並び替えというように呼ぶことにする。例えば 1〜12 の並び替えを一つあげると

$$(12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$$

である。また、何か（例えば 1〜3 とか 1〜5 とか）の並び替えになっているものを単に並び替えと呼ぶことにする。

並び替え $(1, 2, 3, 4)$ では 1 の右にある数は全て 1 より大きい。同様に 2 より右にある数は全て 2 より大きく、3 の右にある数は全て 3 より大きい。しかし並び替え $(3, 4, 1, 2)$ では 1 の右にある数は全て 1 より大きいが、3 の右にある数のうち、1 と 2 は 3 より小さい。また 4 の右にある数は 1 も 2 も 4 より小さい。並び替えにおいて、上で述べたような、ある数の右にある数がその数よりも小さくなるような数の組合せの個数の違いに注目しよう。

説明するに当たって、上のように書いていては大変なので、簡単に表記できるように「転倒ペア」という言葉をまず導入しよう。先の並び替え $(3, 4, 1, 2)$ において、2 つの数字 s, t を順番を変えずに抜き出して (s, t) のように組 (ペア) にして書くと、全部で

$$(3,4),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(1,2)$$

の 6 通りである。このなかで、右にある数字が左にある数字よりも小さいもの、すなわち

$$(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)$$

の 4 個が並び替え $(3,4,1,2)$ の転倒ペアである。このように、並び替え x で使われている 2 つの数字に着目し、左に位置する数字（この数字を s で表すこととする）が右に位置する数字（この数字を t で表すこととする）よりも大きいとき、この 2 つの数字のペア (s,t) を x の転倒ペアと呼ぶ。

並び替え x の転倒ペアの個数を x の転倒数と呼ぶ。$(3,4,1,2)$ の転倒数は 4 である。また、$(1,2,3,4)$ は転倒ペアを持たないから $(1,2,3,4)$ の転倒数は 0 である。もう少し例を挙げると、$(3,4,2,1)$ の転倒ペアは

$$(3,2),(3,1),(4,2),(4,1),(2,1)$$

の全部で 5 個であるから $(3,4,2,1)$ の転倒数は 5 である。また $(4,3,2,1)$ の転倒数は 6 となる。

ここで、並び替えに含まれる 2 つの数の場所を入れ替えるという操作を考えよう。例えば並び替え $(3,4,1,2)$ の 左から 2 番目の数である 4 と、左から 3 番目の数である 1 の位置を入れ替えると $(3,1,4,2)$ となる。$(3,4,1,2)$ の左から 1 番目の数 3 と、左から 4 番目の数 2 の位置を入れ替えると $(2,4,1,3)$ となる。これらの例からすぐに分かるように、一般に 1〜n の並び替えに含まれるどの 2 つの数字の位置を入れ替えても、数 $1,2,3,\ldots,n$ がひとつずつ含まれることに変わりはないので、得られるものは 1〜n の並び替えである。ここで表記を簡単にするために、新しい記号を導入しよう。上のような操作は、並び替えの左から数えて何番目の数と何番目の数を入れ替えたかを指定すれば決まる。そこで並び替え x の a 番目の数と b 番目の数を入れ替えるという操作を $[a,b]$ という記号で表すことにして、この操作により得られる並び替えを $x[a,b]$ という記号で表すことにしよう。つまり上で挙げた例をこの記号で書くと

$$(3,4,1,2)[2,3]=(3,1,4,2),$$
$$(3,4,1,2)[1,4]=(2,4,1,3)$$

のようになる（なお 1〜n の並び替え x に対して a と b が n 以下の自然数であるときのみに $x[a,b]$ を考えることにする)。

$x[a,b][c,d]$ のように書いたときには、並び替え x に操作 $[a,b]$ を行なって得られた並び替えに 操作 $[c,d]$ を行なったことを意味するものとする。つまり

$$x[a,b][c,d]=(x[a,b])[c,d]$$

である。記号の使い方に慣れるために、もう少し例を挙げておこう。$x=(1,4,2,3,5)$ のとき

$$x[2,3]=(1,2,4,3,5)=x[3,2],$$
$$x[2,5]=(1,5,2,3,4)=x[5,2],$$
$$x[2,3][2,5]=(1,2,4,3,5)[2,5]=(1,5,4,3,2),$$
$$x[2,5][2,3]=(1,5,2,3,4)[2,3]=(1,2,5,3,4)$$

である。

簡単に分かるように、一般に

$$x[a,b]=x[b,a],\quad x[a,b][a,b]=x$$

が成り立つ。なお、a,b,c,d が全て異なるとき

$$x[a,b][c,d]=x[c,d][a,b]$$

であるが、一般には

$$x[a,b][c,d]=x[c,d][a,b]$$

であるとは限らないことに注意しておこう。

さて隣り合った数を入れ替える操作 $[a,a+1]$ によって並び替えの転倒数がどのように変わるかを調べよう。$x=(3,4,1,2)$ (転倒数 4) の場合を考えてみよう。操作 $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ を行なうと

$$(3,4,1,2)[1,2]=(4,3,1,2)\ (\text{転倒数は }5),$$
$$(3,4,1,2)[2,3]=(3,1,4,2)\ (\text{転倒数は }3),$$
$$(3,4,1,2)[3,4]=(3,4,2,1)\ (\text{転倒数は }5)$$

となる。もう少し実験を繰り返すと、次の成立が容易に分かる。

補題 1. n を 2 以上の自然数とする。x を 1〜n の並び替えとし、a を $n-1$ 以下の自然数とするとき

$$x[a,a+1]\ \text{の転倒数}=x\ \text{の転倒数}\ \pm 1$$

である。

この補題は a 番目の数と $(a+1)$ 番目の数の大小に着目して、転倒ペアがどのように変化するかを考えれば簡単に証明できるが、ここでは省略する。この大小に応じて $+1$ になるか -1 になるかも決まっている。

偶数に $+1$ しても -1 しても奇数になる。また奇数に $+1$ しても -1 しても偶数になる。従って、転倒数が偶数か奇数かという性質に着目すると、x の隣同士の数を交換してできる並び替えの転倒数と x の転倒数の偶奇は異なる（即ち、片方が偶数ならばもう片方は奇数で、片方が奇数ならばもう片方は偶数である）ことが分かる。このことから、隣同士を交換するという操作を繰り返し行なった場合には次が成り立つことが直ちに分かる。

(i) x の隣同士の数の交換を奇数回行ってできる並び替えの転倒数と x の転倒数の偶奇は異なる。
(ii) x の隣同士の数の交換を偶数回行ってできる並び替えの転倒数と x の転倒数の偶奇は同じ。

次に、並び替え x の（隣同士とは限らない）2 つの数を交換することによってできる並び替えの転倒数と、もとの x の転倒数の関係を調べてみよう。実は $[a,b]$ という操作は隣同士の数を交換するという操作を繰り返すことによりいつでも得られる。例えば、$a=1,\ b=3$ の場合に

$$
\begin{aligned}
&(1,2,3,4)[1,2][2,3][1,2]=(2,1,3,4)[2,3][1,2]\\
&=(2,3,1,4)[1,2]\\
&=(3,2,1,4)=(1,2,3,4)[1,3]
\end{aligned}
$$

である。この例で、数 1 の位置に注目すると、$1(=a)$ 番目 $\rightarrow$2 番目 $\rightarrow 3(=b)$ 番目と $b-a=2$ 回の操作で移動している。この 2回の操作の後に、数 3 は $b-1=2$ 番目にいる。数 1 を移動させたのと同様の操作を行なうことにより、数 3 は $2(=b-1)$ 番目 $\rightarrow 1(=a)$ 番目と $(b-1)-a=1$ 回の操作で移動している。まとめると、$[a,b]=[1,3]$ という操作は、隣同士を交換するという操作を $(b-a)+(b-1-a)=2(b-a)-1=3$ 回行なえば得られることが分かった。

同じように考えると、一般に、交換する数が左から a 番目と b 番目で、$|a-b|=k$ のときには x の隣同士の交換を $k+(k-1)=2k-1$ 回行えば $x[a,b]$ が得られる。$2k-1$ は常に奇数であるから、先に示したことより次のことが分かる。

補題 2. 並び替え x に対して、x の 2 つの数を交換してできる並び替えの転倒数と x の転倒数の偶奇は異なる。

4.　問題の定式化

次に、15 パズルを数学的にとらえて、問題を定式化しよう。15 パズルの（外枠を取り除いた）途中の状態および完成状態を表す図形を 15 盤と呼ぶことにする。次の二つは 15 盤の例である。

1	2	3	4
5	6	7	9
10	11	8	12
13	14	15	

,

2	1	3	9
5	8	6	15
10		11	4
13	14	7	12

特に、15 パズルでの完成状態を表す 15 盤

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

を以下 T_0 で表すことにする。次に、15 盤に対して、15 パズルでの操作を記号で表してみよう。 15 盤 T と、自然数 k に対して、T の $\boxed{}$ の上下左右のどこかに $\boxed{k}$ があるとき T の $\boxed{}$ と $\boxed{k}$ を交換して得られる 15 盤を $T[k]$ で表すこととする。例えば

$T=$

2	1	3	9
5	8	6	15
	10	11	4
13	14	7	12

のとき

$T[5]=$

2	1	3	9
	8	6	15
5	10	11	4
13	14	7	12

,

$T[10]=$

2	1	3	9
5	8	6	15
10		11	4
13	14	7	12

,

$T[13]=$

2	1	3	9
5	8	6	15
13	10	11	4
	14	7	12

となる。なお、勝手に k を決めたときに $T[k]$ という記号が常に意味を持つわけではないことに注意しておこう。例えば上の T に対して、$k\neq 5,13,15$ の場合には、この T に対して $[k]$ に対応する操作はできないので、そのような $T[k]$ は意味を持たない。ちなみに、$T[k]$ が意味を持つときには常に

$$T[k][k]=T$$

である。

ここで 15 盤 T に対して

$$T[k_1][k_2]\ldots[k_m]=T_0$$

となる 15 以下の自然数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$ がとれるとき T を完成可能な 15 盤と呼ぶことにする。言い換える

と、T が完成可能な 15 盤であるということは 15 パズルとしての操作を繰り返すことにより T の状態から T_0 の状態にたどりつけるということである。例えば

$T=$

1	2	3	4
5	6		7
9	10	11	8
13	14	15	12

のとき $T[7][8][12]=T_0$ となるので T は完成可能な 15 盤である。そこで完成可能な 15 盤とはどのようなものかを調べることが目標となる。

5.　15 盤の不変量

本節では、15 盤に対して、15 パズルとしての操作を行っても変わらない量（不変量）を利用し、完成可能な 15 盤とはどういったものかを明確にしよう。

15 盤 T の $\boxed{}$ に 16 を書き入れ $\boxed{16}$ としたものを

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

の数字の順に記述して得られる 1 ～16 の並び替えを $\widetilde{T}$ で表すことにする。例えば

$$\widetilde{T_0}=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16),$$
$$\widetilde{T_0} \text{ の転倒数} = 0$$

である。また、

$T=$

2	1	3	9
5	8	6	15
10		11	4
13	14	7	12

のとき

$$\widetilde{T}=(2,1,3,9,5,8,6,15,10,16,11,4,13,14,7,12),$$
$$\widetilde{T} \text{ の転倒数} = 32,$$
$$\widetilde{T[8]}=(2,1,3,9,5,16,6,15,10,8,11,4,13,14,7,12),$$
$$\widetilde{T[8]} \text{ の転倒数} = 37$$

となる。ここで $\widetilde{T[8]}=\widetilde{T}[6,10]$ であることに注意してもらいたい。

上の例からわかるように、一般に 15 盤 T に対して ($T[k]$ が意味を持つときには)、並び替え $\widetilde{T[k]}$ は、並び替え $\widetilde{T}$ の 2 つの数を交換したものとなっている。従って、補題 2 より

$$\widetilde{T[k]} \text{ の転倒数と } \widetilde{T} \text{ の転倒数の偶奇は異なる} \tag{1}$$

ことが分かった。つまり、15 盤に対応する並び替えの転倒数の偶奇は、15 パズルとしての操作に対して、残念ながら不変ではない。そこでもう一工夫が必要である。そのために、転倒位置数という量を導入しよう。15 盤 T に対して、T の $\boxed{}$ が上から i 行目、左から j 列目に位置しているとき、$\widetilde{T}$ の転倒数 $+i+j$ を T の転倒位置数と呼ぶ。例えば、先の

$T=$

2	1	3	9
5	8	6	15
10		11	4
13	14	7	12

に対しては

$$T \text{ の転倒位置数} = 32+3+2=37,$$
$$T[8] \text{ の転倒位置数} = 37+2+2=41$$

となっている。

ここで、T を $\boxed{}$ が i 行 j 列にある 15 盤とする。即ち

$$T \text{ の転倒位置数} = \widetilde{T} \text{ の転倒数 } +i+j \tag{2}$$

とする。この T に対して ($T[k]$ が意味を持つときには)、$T[k]$ の $\boxed{}$ は i 行 $j+1$ 列 (右へ移動)、$i+1$ 行 j 列 (下へ移動)、i 行 $j-1$ 列 (左へ移動)、$i-1$ 行 j 列 (上へ移動) のいずれかにあるので

$$T[k] \text{ の転倒位置数} = \widetilde{T[k]} \text{ の転倒数 } +i+j\pm 1 \tag{3}$$

となる。故に、(1), (2), (3) より次が得られる。

補題 3. 15 盤 T に対して ($T[k]$ が意味を持つときには) $T[k]$ の転倒位置数と T の転倒位置数の偶奇は同じである。

つまり、転倒位置数の偶奇は、15 パズルとしての操作を行っても不変であることが分かった。

以上を用いて、T が完成可能な 15 盤のときには T の転倒位置数がどうなるのかを考えてみよう。

まず、T が完成可能な 15 盤とすると

$$T[k_1][k_2][k_3]\ldots[k_m]=T_0 \tag{4}$$

となるような 15 以下の自然数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$ が存在している。従って、(4) と補題 3 より

T の転倒位置数

$T[k_1]$ の転倒位置数

$T[k_1][k_2]$ の転倒位置数

$\vdots$

$T[k_1][k_2]\ldots[k_m](=T_0)$ の転倒位置数

の偶奇は全て同じとなる。ここで T_0 の転倒位置数は 8 で偶数であるので、T の転倒位置数は偶数である。即ち T が完成可能な 15 盤ならば T の転倒位置数は偶数である。従って、対偶をとることにより次が得られる。

定理 1. 15 盤 T に対して、T の転倒位置数が奇数ならば T は完成可能な 15 盤ではない。

冒頭で述べた懸賞金がかけられた問題は "15 盤 T_0 の 14 と 15 を交換してできる 15 盤を T としたとき、T は完成可能な 15 盤であることを示せ" という問題と言い換えられる。しかし実際に、T の転倒位置数を計算すると 9 となり、定理 1 より T は完成可能な 15 パズルではないことが分かる。従って、いくら頑張っても懸賞金がかけられた問題は解けないことが結論づけられる。なお、一般の 15 パズルに対しても、対応する 15 盤の転倒位置数が奇数であれば、その状態から完成させることは不可能であることも定理 1 より直ちに得られる。

最後にどのような 15 盤が完成可能かという問題について注意しておく。T が完成可能な 15 盤ならば、T の転倒位置数は偶数であることは先ほど示した。しかし、逆に T の転倒位置数が偶数ならば、T は完成可能な 15 盤であるかどうかについては、本稿でここまでに述べたことからは何も結論を出すことはできない。しかし、実はこのことも正しいことが知られている。

定理 2. 15 盤 T に対して、T の転倒位置数が偶数ならば、T は完成可能な 15 盤である。

この証明には、さらに専門的な知識を必要とするので、ここでは省略する。もし興味があれば、対称群の部分群である交代群の生成元について勉強してみるとよいだろう (例えば [2] などを参照されたい)。

6.　最後に

本稿に従って、著者の一人が伊都高等学校での出前授業（計３時間）を行ったところ「このようなことに数学が利用できると知りびっくりした」、「記号が多く分かりにくいところもあったが興味をもって聞くことができた」というような意見が得られた。

おおむね好評であったようではあるが、上の意見にも見られるように、新しい記号の多さが、ややとっつきにくさに繋がったようである。

最初に述べたように、数学はその構成においては論理のみに依存する学問である。そのため、現代数学の用語は全て誤解のないように厳密に定義される。また、現代数学では表記を明快かつ簡潔にするため、様々な記号を導入することが多い。本稿でも随所に見られるように、文章で長々と書いていたものが、記号を導入することにより、(少なくとも数学に慣れたものにとっては) 明快かつ簡潔に表現されるのである。

繰り返しになるが、数学では全ての言葉・記号には明確な定義が与えられている。従って、それらの意味を曖昧なまま、漫然と読んでいても決して内容は分からない。分からない言葉が出てきたときには、もう一度振り返ってその意味を理解するという当たり前のことを繰り返すことにより、数学を「読める」ようになるはずである。こういった学習態度は数学を学ぶためには、いずれ身に着けるべきことではあるが、近年の中学・高校生でこのような態度を身に着けているものは少ないようである。むしろ、数学を「読んで意味内容を理解するもの」とすら思っていない学生が多いように思われる。

誤解のないように述べておくが、新しい概念の導入はその数学理論にとって本質的なものであるが、記号の導入自体は表記の簡略化が目的であって論理展開に本質的なわけではない。従って新しい記号をまったく導入しない形で、この題材を講義することももちろん可能であろう。しかしながら、ある程度の記号を導入しないと、かえって煩雑になり内容が分からなくなってしまう恐れもある。この点をどのように解決するかは、今後の課題であろう。

7.　謝辞

実際に授業を行う機会を与えて頂いた伊都高等学校の木地茂典先生に感謝の意を表したい。

参考文献

[1] 秋山仁・中村義作「ゲームにひそむ数理」森北出版株式会社

[2] 芳沢光男「置換群から学ぶ組合せ構造」日本評論社